الحركة في مستو وفي الفضاء

(Motion in Plane and Space)

2 - 1 تمهيد

درسنا في الفصل الأول حركة جسيم على خط مستقيم . في الفصل الحالي والذي يليه ندرس حركة جسيم في مستو أو في الفضاء. فنخصص الفصل الحالي لدراسة الخواص العامة لحركة الأجسام في بعدين (مستو) أو ثلاثة أبعاد (الفضاء)، ثم نعتبر حركة المقذوفات وحركة الأجسام المشحونة المتحركة في مجال كهرمغناطيسي. بينما نخصص الفصل الثالث لدراسة حركة الأجسام الخاضعة لقوى مركزية لأهمية هذا الموضوع في الميكانيك.

2 - 2 تعاريف أساسية في جبر وتحليل المتجهات (اختياري)

2 - 2 - 1 تساوي المتجهات :

نقول إن المتجهين **B** و **A** متساويان إذا كان لهما نفس الطول والاتجاه، ونكتب:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

عندئذ يكون :

$$A_z = B_z \quad , \quad A_y = B_y \quad , \quad A_x = B_x$$

2 - 2 - 2 جمع وطرح المتجهات:

نجمع أو نطرح المتجهين **A** و **B** بالشكل:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x)\mathbf{i} + (A_y \pm B_y)\mathbf{j} + (A_z \pm B_z)\mathbf{k} \qquad (1-2)$$

حيث **i** و **j** و **k** متجهات وحدة على المحاور ox، و oy ، و oz ، على الترتيب.

2 - 2 - 3 ضرب متجه بعدد:

حاصل ضرب متجه **A** بعدد n هو متجه جديد طوله $n\,\mathbf{A}$ ، اتجاهه باتجاه **A** إذا كان n موجباً، أو بعكس **A** إذا كان n سالباً، ونكتب:

$$n\mathbf{A} = (nA_x, nA_y, nA_z)$$

2 - 2 - 4 ضرب متجه بمتجه : الضرب العددي (Scalar Product):

نعرف الضرب العددي لمتجهين **A** و **B** بالعلاقة :

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = c = AB\cos\theta_{AB} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (2-2)$$

حيث ترمز Θ_{AB} للزاوية بين **A** و **B** ، بينما c عدد قيمته هي حاصل ضرب **A** بـ **B** .

نستفيد من هذا التعريف لإيجاد طول متجه فنكتب:

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

أي أن :

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

2 - 2 - 5 ضرب متجه بمتجه: الضرب المتجه (التقاطعي) (Vector Product)

نعرف الضرب المتجه لمتجهين **A** و **B** بالعلاقة:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{C} \qquad (3-2)$$

حيث **i** و **j** و **k** متجهات وحدة على المحاور ox و oy و oz ، على الترتيب و **C** متجه يُعطى طوله بالعلاقة:

$$C = AB\sin\theta_{AB}$$

حيث θ_{AB} الزاوية بين **A** و **B** .

2 - 2 - 6 الضرب الثلاثي العددي والمتجه (Triple Product) :

نطلق على $\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ اسم الضرب الثلاثي (أو المختلط) العددي للمتجهات **A** و**B** و**C**، تعطي نتيجته بالمعين (أو المحدد) (Determinent) التالي:

$$\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (4-2)$$

يمكن البرهان بسهولة أن:

$$\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\bullet\mathbf{C} \qquad (5-2)$$

من جهة أخرى، نطلق على $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ اسم الضرب الثلاثي المتجه للمتجهات **A** و **B** و **C**.
يمكن البرهان بسهولة أن:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}) \qquad (6-2)$$

2 - 2 - 6 اشتقاق المتجهات *(Vector Differentiation)* :

إذا كان المتجه **A** معطى بالعلاقة:

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$$

عندئذ نكتب مشتقه بالنسبة لمنظومة المحاور *oxyz* (أي معدل تغيره بدلالة الزمن بالنسبة لمراقب موجود في هذه المنظومة) بالشكل :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{dA_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{dA_z}{dt}\mathbf{k} \qquad (7-2)$$

بفرض أن متجهات الوحدة **i** و **j** و **k** تبقى ثابتة بالنسبة لمنظومة المحاور *oxyz* .

أما إذا كتبنا **A** بدلالة متجهات وحدة $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ متغيرة الاتجاه بالنسبة لمنظومة المحاور *oxyz*، عندئذ يكون :

$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+A_3\mathbf{e}_3 \qquad (8-2)$$

و

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{dA_1}{dt}\mathbf{e}_1+\frac{dA_2}{dt}\mathbf{e}_2+\frac{dA_3}{dt}\mathbf{e}_3+(A_1\frac{d\mathbf{e}_1}{dt}+A_2\frac{d\mathbf{e}_2}{dt}A_3\frac{d\mathbf{e}_3}{dt}) \qquad (9-2)$$

للعلاقة (9-2) أهمية كبيرة في حالة دراسة حركة جسيم بالنسبة لمنظومة محاور متحركة، مثل حركة جسم على سطح الأرض التي تدور حول الشمس. سندرس هذا الموضوع بالتفصيل في الفصل السابع.

نفترض فيما يلي أن منظومة المحاور الإحداثية ساكنة، ونوجد سرعة وتسارع جسيم عندما نكتب متجه موضعه بالاحداثيات **الديكارتية** *(cartesian)*، أو **القطبية** *(polar)*، أو **الكروية** *(spherical)*، أو **الاسطوانية** *(cylindrical)*.

2 - 3 سرعة وتسارع جسيم يتحرك في الفضاء

2 - 3 -1 الاحداثيات الديكارتية *(cartesian coordinats)*:

لنفترض أن لدينا جسيما m محدداً بالمتجه $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بالنسبة لمنظومة محاور إحداثية ثابتة $oxyz$، عندئذ نكتب متجه سرعة الجسيم بدلالة $\mathbf{i}$ و$\mathbf{j}$ و$\mathbf{k}$ بالشكل:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \qquad (10-2)$$

ونكتب تسارعه بالشكل :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (11-2)$$

أو :

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (12-2)$$

2 - 3 -2 مؤثر التدرج *(gradient operator)* :

نعرف **تدرج** *(gradient)* أيّ دالة عددية $u = u(x,y,z)$ بالإحداثيات الديكارتية بالعلاقة:

$$du = d\mathbf{r} \bullet \nabla u \qquad (13-2)$$

حيث نضع :

$$d\mathbf{r} = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j} + (dz)\mathbf{k} \qquad (14-2)$$

ونعرّف تدرج الدالة العددية u بالعلاقة :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathbf{k} \qquad (15-2)$$

يُسمى ∇ **مؤثر التدرج** *(gradient operator)* ويعطى بـ:

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x})\mathbf{i} + (\frac{\partial}{\partial y})\mathbf{j} + (\frac{\partial}{\partial z})\mathbf{k} \qquad (16-2)$$

نلاحظ أن (2-15) تنتج من تطبيق المؤثر ∇ على الدالة العددية u.

2 - 3 -3 دوّار متجه *(curl of a vector)* :

نعرف **دوّار** *(curl)* متجه $\mathbf{A}$ بالعلاقة :

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (17-2)$$

حيث يدل الرمز $\partial/\partial x$ مثلاً على الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمتحول x.

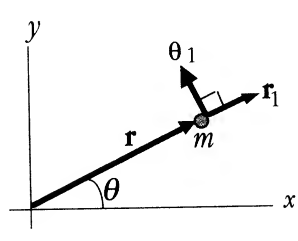
نلاحظ أننا نحصل على دوّار متجه بضربه بشكل متجه بمؤثر التدرج ∇. سنرى بعد قليل كيف نستفيد من تدرج دالة ودوّار متجه عند حساب الشغل والعزم وغيرها من الكميات الفيزيائية.

2 - 3 -4 الاحداثيات القطبية *(polar coordinates)* :

عندما يتحرك جسيم في مستو فإن موضعه يتحدد بالمتجه:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = r\mathbf{r}_1 \qquad (18-2)$$

حيث $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ متجهي وحدة على امتداد ox و oy ، على الترتيب، بينما $\mathbf{r}_1$ متجه وحدة على امتداد $\mathbf{r}$ ، كما في الشكل (2-1) .



الشكل (2-1)

نفترض فيما يلي أن منظومة المحاور الإحداثية ساكنة، ونوجد سرعة وتسارع جسيم عندما نكتب متجه موضعه بالاحداثيات **الديكارتية** *(cartesian)*، أو **القطبية** *(polar)*، أو **الكروية** *(spherical)*، أو **الاسطوانية** *(cylindrical)*.

2 - 3 سرعة وتسارع جسيم يتحرك في الفضاء

2 - 3 -1 الاحداثيات الديكارتية *(cartesian coordinats)*:

لنفترض أن لدينا جسيما m محدداً بالمتجه $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بالنسبة لمنظومة محاور إحداثية ثابتة $oxyz$، عندئذ نكتب متجه سرعة الجسيم بدلالة $\mathbf{i}$ و$\mathbf{j}$ و$\mathbf{k}$ بالشكل:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \qquad (10-2)$$

ونكتب تسارعه بالشكل :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (11-2)$$

أو :

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (12-2)$$

2 - 3 -2 مؤثر التدرج *(gradient operator)* :

نعرف **تدرج** *(gradient)* أيّ دالة عددية $u = u(x,y,z)$ بالإحداثيات الديكارتية بالعلاقة:

$$du = d\mathbf{r} \bullet \nabla u \qquad (13-2)$$

حيث نضع :

$$d\mathbf{r} = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j} + (dz)\mathbf{k} \qquad (14-2)$$

ونعرّف تدرج الدالة العددية u بالعلاقة :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathbf{k} \qquad (15-2)$$

في حالة الحركة في مستو، يمكن أن نحدد موضع الجسيم بالاحداثيات الديكارتية (x,y) أو بالإحداثيات القطبية (r,θ)، ونربط بين هذه الإحداثيات، من الشكل (2-1)، بالعلاقات:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (19-2)$$

و

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad (20-2)$$

الآن: نعرّف متجه الوحدة لأي محور ليكون باتجاه ازدياد إحداثي ذلك المحور. لذلك نعتبر متجهي الوحدة $\mathbf{r}_1$ و θ_1 ليكونا باتجاه ازدياد كل من r و θ، على الترتيب، كما في الشكل (2-1). يمكن عندئذ الربط بين متجهي الوحدة $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ من جهة وبين $\mathbf{r}_1$ و θ_1، من جهة أخرى، بالعلاقات الآتية:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \cos\theta\ \mathbf{i} + \sin\theta\ \mathbf{j} \\ \boldsymbol{\theta}_1 = -\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j} \end{cases} \qquad (21-2)$$

و

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \cos\theta\ \mathbf{r}_1 + \sin\theta\ \boldsymbol{\theta}_1 \\ \mathbf{j} = \sin\theta\ \mathbf{r}_1 + \cos\theta\ \boldsymbol{\theta}_1 \end{cases} \qquad (22-2)$$

الآن: لحساب سرعة وتسارع جسيم بالإحداثيات القطبية، نكتب متجه الموضع له بالشكل:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1 \qquad (23-2)$$

باشتقاق طرفي هذه العلاقة نجد :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1 + r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \qquad (24-2)$$

أو

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{d\theta}\ \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\ \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

حيث نجد من العلاقات (2-21) أن:

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{d\theta} = -\sin\theta \ \ \mathbf{i} + \cos\theta \ \ \mathbf{j} = \boldsymbol{\theta}_1 \qquad (25-2)$$

و

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}_1}{d\theta} = -\cos\theta \ \ \mathbf{i} + \sin\theta \ \ \mathbf{j} = \mathbf{r}_1 \qquad (26-2)$$

لذلك تؤول (2-24) إلى:

$$\mathbf{v} = (\dot{r})\mathbf{r}_1 + (r\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1 \qquad (27-2)$$

أو :

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{r}_1 + v_\theta\boldsymbol{\theta}_1 \qquad (28-2)$$

حيث نعرف **السرعة القطرية** *(radial velocity)* v_r :

$$v_r = \dot{r} \qquad (29-2)$$

والسرعة المماسية *(tangential velocity)* v_θ :

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad (30-2)$$

بنفس الطريقة، يمكن البرهان أن تسارع الجسيم يعطي بالعلاقة:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1 = a_r\mathbf{r}_1 + a_\theta\boldsymbol{\theta}_1 \qquad (31-2)$$

حيث نعرف **التسارع القطري** a_r ، **والتسارع المماسي** a_θ بالعلاقتين:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases} \qquad (32-2)$$

نلاحظ من العلاقة (2-31) أنه اذا تحرك الجسم بحيث بقي بُعده r عن المركز ثابتاً، أي أن:

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

عندئذ يصير التسارع القطري مساوياً إلى :

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 \qquad (33-2)$$

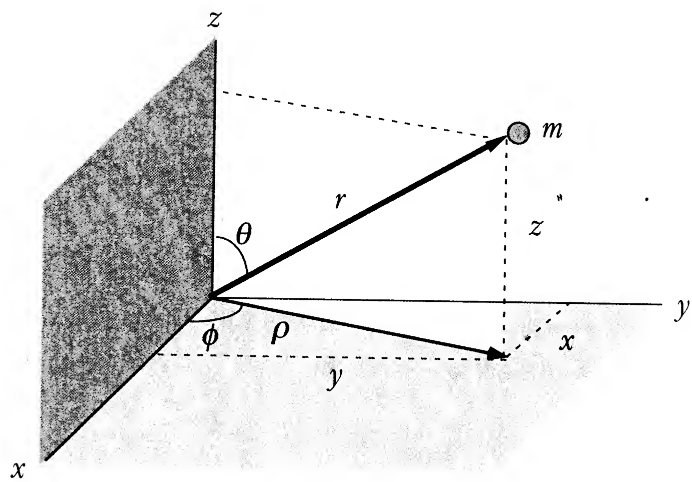
يُطلق على a_r اسم **التسارع المركزي** *(central or centripetal acceleration)*، ويتجه نحو المركز (لاحظ الإشارة السالبة أمام $-r\dot{\theta}^2$) ، بحيث يتحرك الجسم على دائرة نصف قطرها r بسرعة مماسية ثابتة v_θ معطاة بالعلاقة (30-2) .

2 - 3 -3 الإحداثيات الكروية والاسطوانية *(spherial and cylindrical coordinates)*:

عندما يتحرك جسيم في الفضاء فاننا نحدد موضعه بالاحداثيات الديكارتية (x,y,z)، أو الكروية (r,θ,ϕ)، أو الاسطوانية (ρ,ϕ,z) ، الموضحة في الشكل (2-2).

نربط بين مختلف الاحداثيات، من الشكل (3-2) ، بالعلاقات التالية:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi = r\sin s\theta\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi = r\sin\theta\sin\phi \\ z = \quad z \quad = r\cos\theta \end{cases} \qquad (34-2)$$



الشكل (2-2)

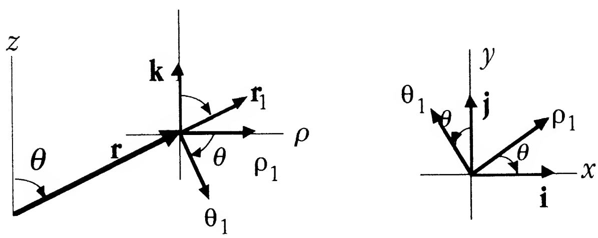
و

$$
(35-2) \qquad \begin{cases} r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = (\rho^2+z^2)^{1/2} \\ \theta = \cos^{-1}(\frac{z}{r}) = \sin^{-1}(\frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{r}) = \tan^{-1}(\frac{\rho}{z}) \\ \phi = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \cos^{-1}(\frac{x}{\rho}) = \sin^{-1}(\frac{y}{\rho}) \end{cases}
$$

و

$$
(36-2) \qquad \begin{cases} \rho = (x^2+y^2)^{1/2} = r\sin\phi \\ \phi = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \cos^{-1}(\frac{x}{\rho}) = \sin^{-1}(\frac{y}{\rho}) \\ z = \quad z \quad = r\cos\theta \end{cases}
$$

من جهة أخرى، يمكن الربط بين مختلف متجهات الوحدة$(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ و$(\mathbf{r}_1,\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\phi}_1)$ و$(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\phi}_1,\mathbf{k})$، كما هو موضح في الشكلين (2-4أ و ب):



(ب) الشكل (2-4) (أ)

(أ) الربط بين $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ و$(\mathbf{r}_1,\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\phi}_1)$:

$$
(37-2) \qquad \begin{cases} \mathbf{i} = (\sin\theta\cos\phi)\mathbf{r}_1 + (\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{\theta}_1 - (\sin\phi)\boldsymbol{\phi}_1 \\ \mathbf{j} = (\sin\theta\sin\phi)\mathbf{r}_1 + (\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{\theta}_1 + (\cos\phi)\boldsymbol{\phi}_1 \\ \mathbf{k} = (\cos\theta)\mathbf{r}_1 - (\sin\theta)\boldsymbol{\theta}_1 \end{cases}
$$

و

$$
(38-2) \qquad \begin{cases} \mathbf{r}_1 = (\sin\theta\cos\phi)\mathbf{i} + (\sin\theta\sin\phi)\mathbf{j} + (\cos\theta)\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\theta}_1 = (\cos\theta\cos\phi)\mathbf{i} + (\cos\theta\sin\phi)\mathbf{j} - (\sin\theta)\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\phi}_1 = (-\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j} \end{cases}
$$

ب) الربط بين $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ و$(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\phi}_1,\mathbf{k})$:

$$\begin{cases} \mathbf{i}=(\cos\phi)\boldsymbol{\rho}_1+(\sin\phi)\boldsymbol{\phi}_1 \\ \mathbf{j}=(\sin\phi)\boldsymbol{\rho}_1+(\cos\phi)\boldsymbol{\phi}_1 \\ \mathbf{k}=\mathbf{k} \end{cases} \qquad (39-2)$$

و

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_1=(\cos\phi)\mathbf{i}+(\sin\phi)\mathbf{j} \\ \boldsymbol{\phi}_1=(-\sin\phi)\mathbf{i}+(\cos\phi)\mathbf{j} \\ \mathbf{k}=\mathbf{k} \end{cases} \qquad (40-2)$$

جـ) الربط بين $(\mathbf{r}_1,\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\phi}_1)$ و$(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\phi}_1,\mathbf{k})$:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1=(\sin\theta)\boldsymbol{\rho}_1+(\cos\theta)\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\theta}_1=(\cos\theta)\boldsymbol{\rho}_1-(\sin\theta)\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\phi}_1=\boldsymbol{\phi}_1 \end{cases} \qquad (41-2)$$

و

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_1=(\cos\theta)\boldsymbol{\theta}_1+(\sin\theta)\mathbf{r}_1 \\ \boldsymbol{\phi}_1=\boldsymbol{\phi}_1 \\ \mathbf{k}=(\cos\theta)\mathbf{r}_1-(\sin\theta)\boldsymbol{\theta}_1 \end{cases} \qquad (42-2)$$

نستفيد من العلاقات بين متجهات الوحدة أعلاه لاشتقاق مركبات سرعة وتسارع جسيم في الإحداثيات الكروية والاسطوانية، كما فعلنا في حالة الإحداثيات القطبية.

يترك للقارئ أن يبرهن أن:

$$\mathbf{v}=\begin{cases} \dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k} \\ \dot{\rho}\boldsymbol{\rho}_1+\rho\dot{\phi}\boldsymbol{\phi}_1+\dot{z}\mathbf{k} \\ \dot{r}\mathbf{r}_1+r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1+r\sin\phi\dot{\phi}\boldsymbol{\phi}_1 \end{cases} \qquad (42-2)$$

و

$$\mathbf{a}=\begin{cases} \ddot{x}\mathbf{i}+\ddot{y}\mathbf{j}+\ddot{z}\mathbf{k} \\ (\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2)\boldsymbol{\rho}_1+(\rho\ddot{\phi}+2\dot{\rho}\dot{\phi})\boldsymbol{\phi}_1+\ddot{z}\mathbf{k} \\ (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\mathbf{r}_1+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{\theta}_1+ \\ (r\ddot{\phi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\boldsymbol{\phi}_1 \end{cases} \qquad (43-2)$$

يمكن أن تتغير الإحداثيات x وy وz بشكل صريح (*explicit*) مع الزمن أو ضمني (*implicit*) مما يستوجب أخذ ذلك بعين الاعتبار عند إجراء عمليات الاشتقاق أو التكامل.

2 - 4 تطبيقات على جبر وتحليل المتجهات

2 - 4 - 1 حركة جسيم خاضع لعدة قوى

إذا تحرك جسيم m تحت تأثير عدة قوى خارجية $\mathbf{F}_1$، و$\mathbf{F}_2$، و . . . و $\mathbf{F}_N$ فإن تسارعه يعطى بحسب قانون نيوتن الثاني بالعلاقة:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N = m\mathbf{a} \qquad (44-2)$$

أو بالشكل :

$$\mathbf{F}_T = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (45-2)$$

حيث $\mathbf{F}_T$ محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم و$\mathbf{p}$ زخمه الخطي.

بمكاملة العلاقة السابقة بين اللحظتين t_1 و t_2 نجد:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_T \, dt \qquad (46-2)$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر من (2-46) هو تغير الزخم الخطي للجسيم خلال الفترة Δt والطرف الأيمن هو دفع القوة (*impulse*) $\mathbf{F}_T$ خلال تلك الفترة ، أي أن:

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_T \, dt \qquad (47-2)$$

من جهة أخرى لو ضربنا طرفي (2-45) عددياً بمتجه السرعة اللحظية لوجدنا:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_T \qquad (48-2)$$

أو

$$\frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=\frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}mv^2)=\mathbf{F}_T\cdot\mathbf{v} \qquad (49-2)$$

لكن

$$T=\tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (50-2)$$

هي الطاقة الحركية، ومن ثم نجد بمكاملة (2-49) بين اللحظتين t_1 و t_2 أن:

$$T_2-T_1=\int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{F}_T\cdot\mathbf{v})\ dt \qquad (51-2)$$

تسمى (2-51) **الشكل التكاملي لنظرية الطاقة** ، حيث يمثل الحد $\mathbf{F}_T\cdot\mathbf{v}$ القدرة اللحظية p (*instantaneous power*)، أي أن:

$$p=\mathbf{F}_T\cdot\mathbf{v} \qquad (52-2)$$

2 - 4 - 2 شغل قوة مؤثرة على جسيم يتحرك في الفضاء

نعرّف شغل قوة مؤثرة على جسيم خلال انتقاله مسافة ما بالعلاقة :

$$W=\int_{r_1}^{r_2}F\cdot dr \qquad (53-2)$$

حيث تدل $d\mathbf{r}$ على اتجاه الحركة في كل لحظة .

إذا كانت الزاوية بين القوة واتجاه الحركة معروفة عند كل نقطة من المسار عندئذ نكتب العلاقة الأخيرة بالشكل :

$$W=\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}F_T\cos\theta\ dr \qquad (54-2)$$

أما إذا كانت مركبات متجه الموضع $\mathbf{r}$ معروفة دوماً عندئذ يصير الشغل معطى بـ :

$$W = \int F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \qquad (55-2)$$

بوضع $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ في (51-2) نجد :

$$T_2 - T_1 = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{r} = W_T \qquad (56-2)$$

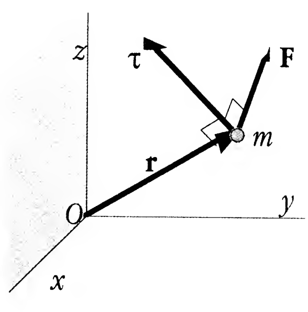
تدل العلاقة أعلاه أن تغير الطاقة الحركية لجسيم عندما ينتقل بين موضعين محددين بمتجهي الموضع $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ يساوي شغل محصلة القوى المؤثرة عليه خلال ذلك. تسمى العلاقة (56-2) **نظرية الشغل والطاقة** (*Work-Energy Theorem*).

2 - 4 - 3 العزم والزخم الزاوي (*Torque & Angular Momentum*)

نعرّف عزم قوة مؤثرة على جسيم بالنسبة لنقطة ما O بالعلاقة :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (57-2)$$

حيث $\mathbf{r}$ متجه موضع الجسيم بالنسبة للنقطة O (أي يبدأ من O وينتهي عند موضع الجسيم) انظر الشكل (5-2).



الشكل (5-2)

إذا كانت $\mathbf{F}$ في (57-2) هي محصلة القوى المؤثرة على الجسيم فنضع $\mathbf{F}=m\,d\mathbf{v}/dt$ ونجد:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})$$

إذ نلاحظ أن :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

حيث يساوي الحد الأول من الطرف الأيمن الصفر لأن $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. بوضع:

$$\boldsymbol{\ell}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}=\mathbf{r}\times\mathbf{p} \qquad (58-2)$$

حيث ℓ **الزخم الزاوي** (*Angular Momentum*) للجسيم بالنسبة لـ O ، يؤول العزم إلى :

$$\boldsymbol{\tau}_T=\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} \qquad (59-2)$$

أي أن عزم محصلة القوى المؤثرة على جسيم بالنسبة لنقطة ما يساوي تغير زخمه الزاوي مع الزمن بالنسبة لنفس النقطة.

هذا هو الشكل العام لقانون نيوتن الثاني في التحريك.

يمكن تعريف الدفع الزاوي والوصول إلى نظرية الزخم الزاوي، كما فعلنا في الحركة الانتقالية، بمكاملة العلاقة السابقة بين اللحظتين t_1 و t_2 فنجد:

$$\boldsymbol{\ell}_2-\boldsymbol{\ell}_1=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{\tau}\;dt \qquad (60-2)$$

حيث يسمى الطرف الأيمن **الدفع الزاوي** (*Angular Impulse*) ويساوي، بحسب (2-60)، تغير الزخم الزاوي بين اللحظتين t_1 و t_2 .

تعطي العلاقة (2-60) الشكل التكاملي لنظرية الزخم الزاوي .

2-5 طاقة الوضع (أو الطاقة الكامنة) (*Potential Energy*)

إذا اعتمدت القوة المؤثرة على جسيم على موضعه في الفضاء فقط عندئذ يصير شغلها عندما ينتقل من $\mathbf{r}_1$ إلى $\mathbf{r}_2$ معطى بالعلاقة:

$$W=\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \qquad (61-2)$$

فإذا عرفنا **طاقة وضع** الجسيم عند الموضع **r** بالشكل:

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (62-2)$$

حيث $\mathbf{r}_s$ موضع اختياري يؤخذ عادة بحيث يكون $V(\mathbf{r})$ هناك معدوماً. عندئذ تكون طاقة الوضع الناتجة عن القوة عند نقطة ما تساوي شغل هذه القوة اللازم لنقل الجسم من مكان اختياري (تنعدم عنده **F**) إلى تلك النقطة.

بإعادة كتابة الشغل W بالشكل:

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_s} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \left(-\int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \right)$$

نجد :

$$W_T = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \qquad (63-2)$$

فشغل قوة مؤثرة على جسيم عندما ينتقل بين نقطتين يساوي الفرق في طاقة الوضع الناتجة عنها بينهما.

إذا كانت القوة هي محصلة القوى المؤثرة على الجسيم عندئذ يصير شغلها مساوياً إلى تغير طاقة الحركة أي أن:

$$T_2 - T_1 = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \qquad (64-2)$$

أو :

$$T_1 + V(\mathbf{r}_1) = T_2 + V(\mathbf{r}_2) \qquad (65-2)$$

نلاحظ من (65-2) أن كل طرف فيها يساوي مجموع طاقة الحركة وطاقة الوضع عند موضع ما. فإذا وضعنا:

$$E = T + V(\mathbf{r}) \qquad (66-2)$$

عندئذ تؤول (2-65) إلى :

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 0 \qquad (67-2)$$

يُطلق على E اسم **الطاقة الميكانيكية الكلية** (*Total Mechanical Energy*).

نتستنتج من (2-67) أنه إذا تحرك جسيم بين نقطتين تحت تأثير محصلة قوى تعتمد على موضعه فقط، يمكن استخلاص طاقة وضع منها عندئذ تبقى طاقته الميكانيكية الكلية ثابتة.

يدعى ماتقدم **مبدأ حفظ الطاقة** (*Principle of Conservation of Energy*).

2 - 6 القوى المحافظة وخطوط تساوي الجهد والمعنى الفيزيائي للتدرج

وجدنا في الفقرة السابقة أنه إذا تحرك جسيم تحت تأثير محصلة قوى تعتمد على موضعه وكان بالإمكان إيجاد طاقة وضع منها ، أي يمكن إجراء التكامل :

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

فإن الطاقة الميكانيكية الكلية لهذا الجسيم تبقى ثابتة عند انتقاله من موضع لآخر . يطلق على القوة المؤثرة عليه عندئذ اسم قوة محافظة (*Conservative Force*).

نلاحظ أن تحقق التكامل السابق يعني أنه يمكن اشتقاق القوة من طاقة وضعها من العلاقة:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \qquad (68-2)$$

ولكن:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$$

فإذا أخذنا الضرب المتجه لطرفي (2-68) بـ ∇ فإننا نجد أن:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (69-2)$$

فالقوة المحافظة هي تلك التي تعتمد على الموضع وتحقق (2-69) .

من جهة أخرى، إذا تحرك جسم على سطح (أو خط) بحيث بقيت طاقة وضعه ثابتة عليه، عندئذ نقول إنه يتحرك على سطح (أو خط) تساوي جهد(*(equipotential surface (or line)*)).

كمثل على ماتقدم نفترض أن جسيماً m يتحرك في الفضاء تحت تأثير جذب جسيم آخر كبير جداً كتلته M، يبعد عنه مسافة r، بقوة معطاة بالعلاقة:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{r}_1 \qquad (70-2)$$

حيث G ثابت الجذب العام و $\mathbf{r}_1$ متجه وحدة من M إلى m . يمكن تحديد طاقة وضع النظام من (2-62) فنجد:

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{GmM}{r} \qquad (71-2)$$

حيث وضعنا الموضع الاختياري $\mathbf{r}_s$ عند $r=\infty$ حيث تنعدم القوة المؤثرة على الجسيم وكذلك طاقة وضعه (أي عند موضع اتزانه). (لاحظ أن الزاوية بين $d\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}_1$ تساوي $180°$). فإذا بقيت طاقة الوضع المعطاة بـ (2-71) ثابتة، أي أن:

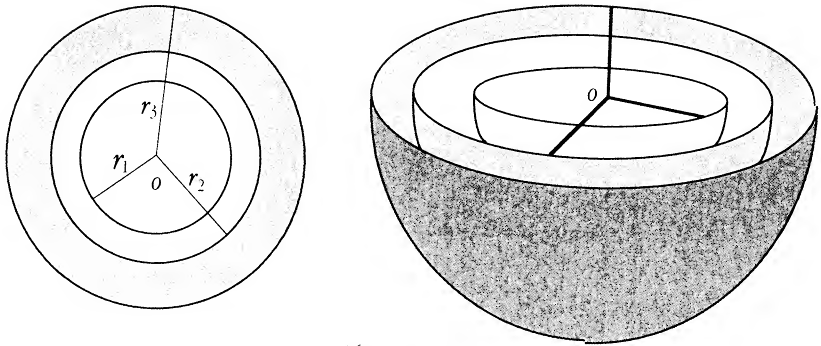
$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{r} = -C \qquad (72-2)$$

حيث C عدد موجب، عندئذٌ نجد من العلاقة السابقة أن:

$$r = \frac{GmM}{C} \qquad (73-2)$$

فيبقى بعد الجسيم m عن الجسيم الكبير M ثابت كيفما تحرك الأول في الفضاء، أي أنه يتحرك على سطح كرة نصف قطرها r. فسطوح تساوي الجهد في هذه الحالة هي كرات تعطى أنصاف أقطارها بالعلاقة (2-73) من أجل قيم مختلفة لـ C، متمركزة عند مركز الجذب M، كما في الشكل (2-6) .

(ب) (أ)



الشكل (6-2)

لنفترض الآن أن الجسيم يتحرك على سطح تساوي جهد بحيث أن :

$$V(x, y, z) = c \tag{74-2}$$

حيث c ثابت. عندئذ يكون :

$$dV(x, y, z) = 0 \tag{75-2}$$

ولكن:

$$dV(x, y, z) = \boldsymbol{\nabla} V \cdot d\mathbf{r} \tag{76-2}$$

حيث يتجه $d\mathbf{r}$ موازياً لسطح تساوي الجهد (حتى يبقى الجسيم متحركاً عليه). نظراً لأن $\boldsymbol{\nabla} V$ لايساوي الصفر بالضرورة لذا نستنتج أن الزاوية بينه وبين $d\mathbf{r}$ هي $90°$، أي أن $\boldsymbol{\nabla} V$ عمودي على سطح تساوي الجهد كما أن

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V$$

لذا نستنتج أن القوة المؤثرة على الجسيم m تتجه عمودياً على سطح تساوي الجهد عند كل نقطة منه.

أخيراً إذا تحرك جسيم تحت تأثير قوة محافظة $\mathbf{F}$ فإن شغلها عندما يتحرك على مسار مغلق ما هو:

$$W = \oint_L \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{77-2}$$

حيث L طول المسار المغلق. لكن بحسب نظرية ستوك (*Stoke's Theorem*) فإن:

$$\oint_L \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_A (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A} \qquad (78-2)$$

حيث A السطح المحصور داخل المسار L و $d\mathbf{A}$ سطح عنصري منه.

بما أن القوة محافظة لذلك يكون:

$$\nabla\times\mathbf{F} = 0$$

أي أن:

$$W = \oint_L \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (79-2)$$

فشغل القوة عندما يتحرك الجسيم على طريق مغلقة يساوي الصفر، فهي لاتعطي ولاتأخذ طاقة. هذا بالتحديد مانعنيه بقولنا إن القوة محافظة !

2 - 7 حركة القذائف (*Projectile Motion*)

2 - 7 -1 حركة القذائف في وسط ساكن عديم الاحتكاك:

تعتبر حركة القذائف مثالاً جيداً على حركة جسيم في مستو أو في الفضاء حيث يخضع الجسيم الى قوة الجاذبية $m\,\mathbf{g}$ ، وقوى الاحتكاك ودفع الرياح، إن وجدت.

فإذا اعتبرنا جسيماً يتحرك تحت تأثير الجاذبية الأرضية فقط وجدنا من قانون نيوتن الثاني:

$$m\,\mathbf{a} = m\,\mathbf{g} \qquad (79-2)$$

باعتبار المحور oz شاقوليا نحو الأعلى.

نأخذ مركبات المعادلة السابقة على المحاور الاحداثية فنجد:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \qquad (80-2)$$

بحل هذه المعادلات مفترضين أن الجسم بدأ حركته في المستوى xz $(x_0=y_0=z_0=v_{0y}=0)$

نجد:

$$\begin{cases} x=v_{0x}\,t \\ y=0 \\ z=-\frac{1}{2}g\,t^2+v_{0z}\,t \end{cases} \qquad (81-2)$$

يمكن إيجاد معادلة المسار الذي يتحرك عليه الجسم باختصار t من المعادلتين أعلاه فنجد:

$$z=-\frac{g}{2\,v_{0x}^2}x^2+\frac{v_{0z}}{v_{0x}}x \qquad (82-2)$$

تمثل العلاقة الأخيرة قطعاً مكافئاً تقعره نحو الأسفل، تصل ذروته لارتفاع $z_{\max}$ عندما تصير السرعة الشاقولية v_z مساوية للصفر، فنجد:

$$z_{max}=\frac{v_{0z}^2}{2g} \qquad (83-2)$$

نحصل على مدى القذيفة عندما $z=z_0=0$ فنجد:

$$R=x_{max}=\frac{2v_{0x}v_{0z}}{g} \qquad (84-2)$$

لا بأس من التنويه"هنا إلى أن هذه النتائج مستقلة عن اختيارنا للمحاور الاحداثية، بمعنى أن أعلى ارتفاع تبلغه القذيفة وأبعد نقطة ستصل اليها لا يرتبطان باختيارنا للمحاور، كما أن شكل المسار الذى تتحرك سيبقى كما هو دائماً.

2-7-2 حركة القذائف في وسط مقاوم

نعتبر فيما يلي حركة قذيفة في وسط يؤثر عليها بقوة مقاومة تتناسب مع متجه سرعتها (كاللزوجة) حيث نكتبها بالشكل:

$$\mathbf{F}_r=-b\mathbf{v} \qquad (85-2)$$

حيث b معامل مقاومة الوسط. من ثم تؤول معادلة الحركة إلى :

$$ma = -mg - bv \qquad (86-2)$$

باعتبار oz نحو الأعلى وأخذ مركبات العلاقة (2-86) على المحاور الاحداثية نجد :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\alpha\dot{x} \\ \ddot{y} = -\alpha\dot{y} \\ \ddot{z} = -g - \alpha\dot{z} \end{cases} \qquad (87-2)$$

حيث وضعنا $\alpha = b/m$.

إذا افترضنا أن القذيفة أطلقت في اللحظة $t=0$ من الموضع $(0,0,0)$ بسرعة $(v_{0x},0,v_{0z})$، وكاملنا المعادلات (2-87) لوجدنا:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = v_{0x}e^{-\alpha t} \\ v_y = \dot{y} = 0 \\ v_z = \dot{z} = v_{0z}e^{-\alpha t} - \dfrac{g}{\alpha}(1 - e^{-at}) \end{cases} \qquad (88-2)$$

بالمكاملة مرة أخرى نجد:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_{0x}}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) \\ y = 0 \\ z = (\dfrac{v_{0z}}{\alpha} + \dfrac{g}{\alpha})(1 - e^{-at}) - \dfrac{g}{\alpha}t \end{cases} \qquad (89-2)$$

نجد معادلة المسار الذي تتحرك عليه القذيفة باختصار الزمن t بين x و z:

$$z = (\frac{g}{\alpha v_{0x}} + \frac{v_{0z}}{v_{0x}})x - \frac{g}{\alpha^2}\ln(\frac{v_{0z}}{v_{0x} - \alpha x}) \qquad (90-2)$$

من الواضح أن المسار لم يعد قطعاً مكافئاً بل يختلف باختلاف معامل المقاومة b.

نلاحظ من (2-90) أنه بعد زمن كبير بالمقارنة مع $1/\alpha$ تصير x ثابتة بينما تنتهي z لـ $-\infty$ ، أي أن:

$$-\infty \leftarrow z \ ; \ \frac{v_{0x}}{\alpha} \leftarrow x \ \Leftarrow \ t >> \frac{m}{b} \qquad (91-2)$$

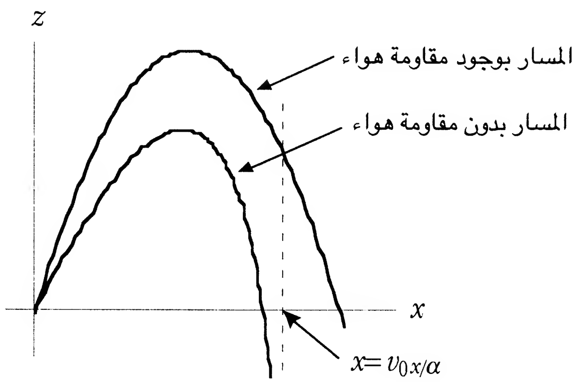
فتصير حركة القذيفة مماثلة لحركة جسيم يسقط سقوطا حرا في وسط مقاوم ، وتؤول مركبتي سرعتها إلى:

$$v_x = \text{ثابت} \qquad (92-2)$$

و

$$v_z = -\alpha g = -\frac{m}{b} g \qquad (93-2)$$

يوضح الشكل (2-7) كيف يتغير شكل مسار قذيفة عندما يكون الوسط الذي تتحرك فيه مقاوماً.



الشكل (2-7)

2 - 7 -3 حركة القذائف في وسط مقاوم بوجود رياح متحركة :

يمكن إدخال تأثير حركة الرياح على حركة القذائف باعتبار أن مقاومة الهواء تتناسب مع سرعة القذيفة بالنسبة للرياح، أي أن مقاومة وسط لجسم يتحرك فيه تتناسب مع سرعة الجسم بالنسبة للوسط.

لذلك نكتب سرعة القذيفة بالنسبة للأرض $\mathbf{V}$ بالشكل:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \qquad (94-2)$$

حيث $\mathbf{v}$ سرعة القذيفة بالنسبة للرياح و $\mathbf{w}$ سرعة الرياح بالنسبة للأرض.

عندئذ تصير قوة المقاومة معطاة بالعلاقة:

$$\mathbf{F}_r = -b\mathbf{v} = -b(\mathbf{V} - \mathbf{w}) \tag{95-2}$$

وتؤول معادلات الحركة إلى :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\alpha(\dot{x} - w_x) \\ \ddot{y} = -\alpha(\dot{y} - w_y) \\ \ddot{z} = -g - \alpha(\dot{z} - w_z) \end{cases} \tag{95-2}$$

يتطلب حل هذه المعادلات معرفة وافية عن حركة الرياح وسرعتها ، إلا أنه يصير في غاية السهولة إذا كانت الرياح تتحرك بسرعة ثابتة.

2 - 8 حركة جسيم مشحون في مجال كهرمغناطيسي

2 - 8 - 1 حركة جسيم مشحون في مجال كهربائي فقط

إذا تحرك جسيم، كتلته m وشحنته q، في مجال كهربائي $\mathbf{E}$ (ناتج عن توزع ما لشحنات كهربائية أخرى) فإنه يخضع لقوة كهربائية معطاة بالعلاقة:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \tag{96-2}$$

وتصير معادلة حركة الجسيم عندئذ :

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} \tag{97-2}$$

إذا أخذنا مركبات المعادلة (2-97) على المحاور الاحداثية وجدنا:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qE_x \\ m\ddot{y} = qE_y \\ m\ddot{z} = qE_z \end{cases} \tag{98-2}$$

حيث يمكن أن تكون مركبات المجال الكهربائي بشكل عام دالة لكل من x و y و z و t.

إذا كان $\mathbf{E}$ ناتج عن شحنات ساكنة (*static charges*) عندئذ يكون:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{99-2}$$

أي أن القوى المؤثرة على الجسيم محافظة وهناك جهد كهربائي (*electric potential*) معطى بالعلاقة:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \tag{100-2}$$

تصير طاقة وضع الجسيم عندئذ معطاة بالعلاقة:

$$V = q\Phi \tag{101-2}$$

وطاقته الكلية :

$$E = \tfrac{1}{2} mv^2 + q\Phi \tag{102-2}$$

2 - 8 - 2 حركة جسيم مشحون في مجال مغناطيسي فقط

عندما يتحرك جسيم مشحون بسرعة $\mathbf{v}$ في مجال مغناطيسي $\mathbf{B}$ فإنه يخضع لقوة مغناطيسية:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{103-2}$$

بحسب قانون نيوتن الثاني فإن :

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

نستنتج من هذه العلاقة أن تسارع الجسيم عمودي دوما على سرعته ، أي أن التسارع القطرى $a_r = dv/dr$ يساوي الصفر، فيتحرك الجسيم بسرعة ثابتة دائماً. هذا صحيح حتى ولو كان $\mathbf{B}$ متغيراً مع الاحداثيات x و y و z طالما أنه لا يتغير مع الزمن t.

2 - 8 - 3 حركة جسيم مشحون في مجال كهرمغناطيسي

إذا تحرك جسيم مشحون في مجالين كهربائي ومغناطيسي معاً فإنه يخضع لقوة تسمى **قوة لورنتز** (*Lorentz's Force*)، تعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

أي أن :

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{104-2}$$

فاذا افترضنا أن :

$$\mathbf{E} = E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k} \tag{105-2}$$

و :

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{k} \tag{106-2}$$

عندئذ نجد من مركبات (2-104) أن :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB_0\dot{x} + qE_y \\ m\ddot{z} = qE_z \end{cases} \tag{107-2}$$

نلاحظ من المعادلة الثالثة من (2-107) أن :

$$z = \frac{qE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t + z_0 \tag{108-2}$$

باشتقاق المعادلة الأولى من (2-107) والإستفادة من الثانية نجد:

$$m\dddot{x} = qB_0\ddot{y} = -\frac{(qB_0)^2}{m}\dot{x} + \frac{q^2B_0}{m}E_y \tag{109-2}$$

بوضع $\dot{x} = u$ تؤول المعادلة الأخيرة إلى :

$$\ddot{u} + (\frac{qB_0}{m})^2 u = \frac{q^2B_0}{m^2}E_y \tag{110-2}$$

أو :

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \frac{q^2B_0}{m^2}E_y \tag{111-2}$$

حيث :

$$\omega = \frac{qB_0}{m} \tag{112-2}$$

كما نعلم، فإن حل المعادلة (2-111) اهتزازي من الشكل:

أي أن القوى المؤثرة على الجسيم محافظة وهناك جهد كهربائي (*electric potential*) معطى بالعلاقة:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \qquad (100-2)$$

تصير طاقة وضع الجسيم عندئذ معطاة بالعلاقة:

$$V = q\Phi \qquad (101-2)$$

وطاقته الكلية :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + q\Phi \qquad (102-2)$$

2 - 8 - 2 حركة جسيم مشحون في مجال مغناطيسي فقط

عندما يتحرك جسيم مشحون بسرعة $\mathbf{v}$ في مجال مغناطيسي $\mathbf{B}$ فإنه يخضع لقوة مغناطيسية:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (103-2)$$

بحسب قانون نيوتن الثاني فإن :

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

نستنتج من هذه العلاقة أن تسارع الجسيم عمودي دوما على سرعته ، أي أن التسارع القطرى $a_r = dv / dr$ يساوي الصفر، فيتحرك الجسيم بسرعة ثابتة دائماً. هذا صحيح حتى ولو كان $\mathbf{B}$ متغيراً مع الاحداثيات x و y و z طالما أنه لا يتغير مع الزمن t.

3 - 8 - 2 حركة جسيم مشحون في مجال كهرمغناطيسي

إذا تحرك جسيم مشحون في مجالين كهربائي ومغناطيسي معاً فإنه يخضع لقوة تسمى **قوة لورنتز** (*Lorentz's Force*)، تعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

أي أن :

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (104-2)$$

فاذا افترضنا أن :

$$\mathbf{E} = E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k} \qquad (105-2)$$

و :

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{k} \qquad (106-2)$$

عندئذ نجد من مركبات (2-104) أن :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB_0\dot{x} + qE_y \\ m\ddot{z} = qE_z \end{cases} \qquad (107-2)$$

نلاحظ من المعادلة الثالثة من (2-107) أن :

$$z = \frac{qE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t + z_0 \qquad (108-2)$$

باشتقاق المعادلة الأولى من (2-107) والإستفادة من الثانية نجد:

$$m\dddot{x} = qB_0\ddot{y} = -\frac{(qB_0)^2}{m}\dot{x} + \frac{q^2B_0}{m}E_y \qquad (109-2)$$

بوضع $\dot{x} = u$ تؤول المعادلة الأخيرة إلى :

$$\ddot{u} + (\frac{qB_0}{m})^2 u = \frac{q^2B_0}{m^2}E_y \qquad (110-2)$$

أو :

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \frac{q^2B_0}{m^2}E_y \qquad (111-2)$$

حيث :

$$\omega = \frac{qB_0}{m} \qquad (112-2)$$

كما نعلم، فإن حل المعادلة (2-111) اهتزازي من الشكل:

$$u = \dot{x} = A\cos(\omega t + \phi) + \frac{E_y}{B_0} \qquad (113-2)$$

ومنه:

$$x = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \phi) + (\frac{E_y}{B_0})t + x_0 \qquad (114-2)$$

بالإستفادة من(113-2) وأولى (107-2) نجد:

$$-mA\omega\sin(\omega t + \phi) = qB_0\dot{y}$$

ومنه :

$$y = \frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \phi) + y_0 \qquad (115-2)$$

يمكن كتابة (114-2) و (115-2) بالشكل:

$$\begin{cases} x - X_0 = a\sin(\omega t + \phi) \\ y - Y_0 = a\cos(\omega t + \phi) \end{cases} \qquad (116-2)$$

حيث:

$$\begin{cases} X_0 = x_0 + (\frac{E_y}{B_0})t \\ Y_0 = y_0 \end{cases} \qquad (117-2)$$

تمثل (116-2) معادلة دائرة مركزها عند النقطة (x_0 , y_0)، ونلاحظ من (117-2) أن هذا المركز لايبقى ثابت في مكانه بل يتحرك بشكل انسحابي على محور السينات بسرعة ثابتة تساوي E_y/B_0 .

لا ننسى طبعاً أن الاحداثي z يزداد بحسب (108-2) بنفس الوقت .

2 - 9 أمثلة عامة

❐ مثل 2-1

ماشغل القوة (N) $\mathbf{F}=(x^2+z^2)\mathbf{i}+(2z)\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ على الطريق $x=y=2z$ بين النقطتين (2,2,1) و(8,8,4) متر؟

الحل: نكتب الشغل

$$W=\int_1^2 \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\int_{x_1}^{x_2} F_x\bullet dx+\int_{y_1}^{y_2} F_y\bullet dy+\int_{z_1}^{z_2} F_z\bullet dz$$

حيث:

$$\int_2^8 F_x\bullet dx=\int_2^8 (x^2+z^2)dx=\int_2^8 (x^2+(\frac{x^2}{4})dx=210\ \ \mathrm{J}$$

و

$$\int_2^8 F_y\bullet dy=\int_2^8 2zdy=\int_2^8 ydy=30\ \ \mathrm{J}$$

و

$$\int_1^4 F_z\bullet dz=\int_1^4 3dz=9\ \ \mathrm{J}$$

فيكون

$$W=249\ \mathrm{J}$$ ❐

❐ مثل 2-2

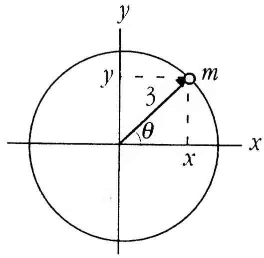
ما شغل القوة (N) $\mathbf{F}=(2x-y+z)\mathbf{i}+(x+y-z^2)\mathbf{j}+(3x-2y+4z)\mathbf{k}$ على جسم يدور دورة كاملة على محيط دائرة في المستوي xy مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها (3 m) ؟

الحل: عندما يتحرك الجسم على الدائرة المذكورة يكون $z=0$ وتصير القوة:

$$\mathbf{F}=(2x-y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+(3x-2y)\mathbf{k}$$

كما أن :

$$d\mathbf{r} = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j}$$



الشكل (9-2)

بتحويل الإحداثيات x و y إلى $x=3\cos\theta$ و $y=3\sin\theta$ حيث تتغير θمن صفر إلى 2π عند دوران الجسم دورة كاملة على الدائرة (انظر الشكل (9-2))، عندئذ يصير الشغل معطى بـ

$$W = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_C [\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}] \bullet d\mathbf{r}$$

$$= \int_C (2x - y)\,dx + (x + y)\,dy$$

$$W = \int_0^{2\pi} [2(3\cos\theta) - 3\sin\theta](-3\sin\theta)\,d\theta + [3\cos\theta + 3\sin\theta](3\cos\theta)\,d\theta$$

أي أن

$$W = 18\,\pi \quad (\mathrm{J})$$ ❐

❐ **مثل 3-2**

برهن أن القوة $\mathbf{F} = (y^2 z^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + (2xyz^3)\mathbf{j} + (3xy^2 z^2 - 6x^2 z)\mathbf{k}$ محافظة.

الحل: حتى تكون $\mathbf{F}$ محافظة يجب أن يكون:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0$$

لكن:

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2z^3-6xz^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2-6x^2z\end{vmatrix}=0$$

فالقوة محافظة فعلاً. ❐

❐ مثل 4-2

ادرس حركة إلكترون في مجال كهربائي $\mathbf{E}=E_0\,\mathbf{i}$ وآخر مغناطيسي $\mathbf{B}=B_0\,\mathbf{k}$ بفرض أنه كان في اللحظة $t=0$ عند نقطة المبدأ ويسير بسرعة $\mathbf{v}=v_0\,\mathbf{i}$ ($\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ متجهات وحدة على المحاور ox و oy و oz، على الترتيب).

الحل: نكتب أن القوة الكلية المؤثرة على الالكترون هي:

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}=q\mathbf{E}+q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \qquad (1)$$

نأخذ مركبات العلاقة الأخيرة على المحاور ox و oy و oz فنجد:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=qB_0\dot{y}\\ m\ddot{y}=qE_0-qB_0\dot{x}\\ m\ddot{z}=0\end{cases} \qquad (2)$$

من الواضح أن حل المعادلة الأخيرة ، بالشروط الابتدائية المفروضة، هو:

$$z=0$$

فالجسم يتحرك في المستوي xy فقط.

باشتقاق المعادلة الاولى من (2)، الاستفادة من الثانية نجد:

$$m\dddot{x}=qB_0\ddot{y}=\frac{q^2B_0}{m}(E_0-B_0\dot{x})$$

بوضع $\dot{x}=u$ نجد:

$$\ddot{u}+(\frac{qB_0}{m})^2 u=\frac{q^2 B_0 E_0}{m^2}$$

أو :

(3) $$\ddot{u}+\omega^2 u=\omega^2 v_c$$

حيث وضعنا:

$$\omega=\frac{qB_0}{m}$$

و

$$v_c=E_0 / B_0$$

بحل (3) المعادلة نجد:

(4) $$u=\dot{x}=A\cos(\omega t+\phi)+v_c$$

بحسب شروط البدء فإن:

(5) $$v_0=A\cos\phi+v_c$$

باشتقاق x والاستفادة من أولى المعادلات (2) نجد:

$$\ddot{x}=-A\omega\sin(\omega t+\phi)=\omega\dot{y}$$

ومنه:

(6) $$\dot{y}=-A\sin(\omega t+\phi)$$

بحسب شروط البدء فإن:

$$A\sin\phi=0$$

أي أن $\phi=0$، لذلك تصبح المعادلة (5) على الشكل:

$$v_0=A+v_c \quad\Rightarrow\quad A=v_0-v_c$$

بتعويض A و ϕ في (4) نجد:

$$\dot{x}=A\cos\omega t+v_c$$

أي أن :

$$x = \frac{A}{\omega}\sin\omega t + v_c t + c$$

بحسب الشروط الابتدائية يكون :

$$c = 0$$

أي أن:

$$x = a\sin\omega t + v_c t \qquad (7)$$

حيث:

$$a = A/\omega$$

بنفس الشكل ، نجد من (6):

$$\dot{y} = -A\sin\omega t$$

ومنه :

$$y = \frac{A}{\omega}\cos\omega t + c'$$

بحسب الشروط الابتدائية يكون:

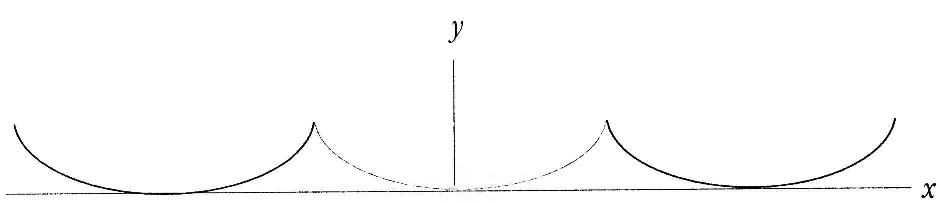
$$c' = -\frac{A}{\omega} = -a$$

أي أن:

$$y = a(\cos\omega t - 1) \qquad (8)$$

بهذا نكون قد وجدنا الحل العام لحركة الالكترون.

يسمى المسار المعطى بالمعادلتين (7) و(8) سايلكلود(*cycloid*) ، كما في الشكل (10-2). (مامغزى الكمية v_c؟ اكتب معادلة المسار!).

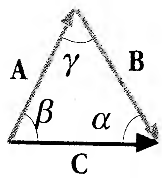


الشكل (10-2)

مسائل

1-2 جد سرعة وتسارع والزخم الخطي والزخم الزاوي بالنسبة للمبدأ O لجسيم m محدد في المواضع التالية: $\mathbf{r}=ct\mathbf{i}-0.5gt^2\,\mathbf{j}$، $\mathbf{r}=ct\mathbf{i}+A\sin(\omega t)\,\mathbf{j}$، $\mathbf{r}=A\sin(\omega t)\,\mathbf{i}+B\cos(\omega t)\,\mathbf{j}$، $\mathbf{r}=ct\,\mathbf{i}+b\cos(\omega t)\,\mathbf{j}+b\sin(\omega t)\,\mathbf{k}$.

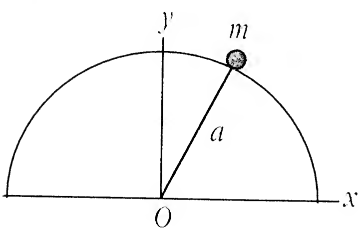
2-2 برهن أن قيمة التسارع الكلي لجسيم m يتحرك على طريق منحني نصف قطر تقوسه ρ وسرعته اللحظية v هي $|\mathbf{a}|=|d\mathbf{v}/dt|=(\dot{v}^2+v^4/\rho^2)^{1/2}$.



الشكل (11-2)

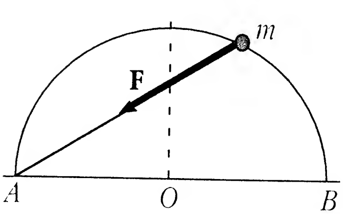
3-2 (أ) برهن أن قيمة محصلة متجهين **A** و **B** تعطى بالعلاقة: $C^2=A^2+B^2+2AB\cos\theta$ حيث θ الزاوية بينهما(قانون جيب التمام (cosine law)).

(ب) برهن أن اتجاه المحصلة يعطى من العلاقة $(A/\sin\alpha)=(B/\sin\beta)=(C/\sin\gamma)$ (انظر الشكل (11-2)):



الشكل (12-2)

4-2 يوضع جسيم m عند ذروة قبة كروية نصف قطرها a، كما في الشكل (12-2)، ويُدفع بلطف لينزلق بدون احتكاك. برهن أن الجسيم سيغادر السطح عند نقطة ارتفاعها $2a/3$ بالنسبة لمركز القبة وجد سرعتها عندئذ.



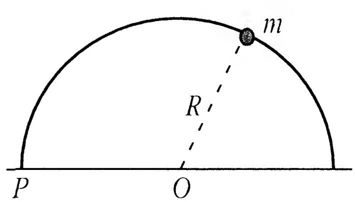
الشكل (13-2)

5-2 يتحرك جسيم على النصف العلوي لكرة نصف قطرها R تحت تأثير قوة جاذبة نحو النقطة A من الكرة متناسبة مع بعد الجسيم عنها، كما في الشكل (13-2)، بحيث أنه عندما يكون الجسيم عند النقطة B فإن قيمة القوة هي F_0. جد شغل هذه القوة عندما يدور الجسيم من A إلى B.

6-2 يخضع جسيم لقوة مركباتها $F_x = ax^3 + bxy^2 + cz$ و $F_y = ay^3 + bx^2y$ و $F_z = cx$. ماشغل القوة عندما ينتقل الجسيم على الخط الواصل بين النقطتين $(0,0,0)$ و(x_0, y_0, z_0)؟

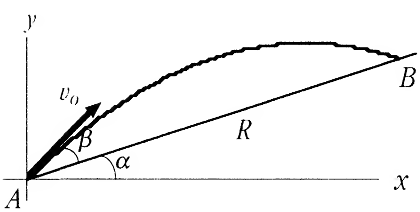
7-2 يتحرك جسيم في المستوي xy تحت تأثير قوة جاذبة نحو المبدأ ومتناسبة عكساً مع بعده عن محور السينات على النحو $F = -b/y$. (أ) ماشغل هذه القوة عندما ينتقل الجسيم من النقطة $(0, a)$ إلى $(2a,0)$ على الطريق المؤلفة من ضلعي مستطيل الأول يوازي محور السينات وطوله $2a$ والثاني يوازي محور الصادات وطوله a.

8-2 جد $\mathbf{L}$ و$\mathbf{F}$ و $\boldsymbol{\tau}$ في أي لحظة لجسيم يتحرك في الفضاء بحيث تعطى إحداثياته بالعلاقات $x = x_0 + at^2$ و $y = bt^3$ و $z = ct$.



الشكل (14-2)

9-2 يتحرك جسيم بسرعة ثابتة v على محيط دائرة نصف قطرها R بدءاً من النقطة P في اللحظة $t=0$، كما في الشكل (14-2). ماالزخم الزاوي للجسيم والقوة المؤثرة عليه وعزمها بالنسبة لـP في أي لحظة؟



الشكل (15-2)

10-2 يطلق جسيم بسرعة ابتدائية v_0 وزاوية β بالنسبة للأفق ليسقط على مستوي يميل بزاوية α عن الأفق، كما في الشكل (15-2).

(أ) برهن أن مدى الجسيم على المستوي هو: $R = 2v_0^2[\sin(g-\alpha)\cos\beta]/(g\cos^2\alpha)$

(ب) برهن أن المدى الأعظمي على المستوي هو $R_{max} = v_0^2/(1+\sin\alpha)$ وأننا نحصل عليه عندما $\beta = \pi/4 + \alpha/2$.

11-2 برهن أن أعلى ارتفاع لمدفع مداه R هو $R/4$ وأن زمن الطيران هو $(R/2g)^{1/2}$.

12-2 يحاول رامي مدفعية إصابة هدف يبعد عنه مسافة أقل من المدى الأعظم لمدفعه برهن أن هناك زاويتان محتملتان للإطلاق أولاهما أصغر بقيمة ما من $45°$ والثانية أكبر بنفس القيمة من $45°$. كيف يتغير الحل لو وجدت مقارمة هواء متناسبة مع السرعة اللحظية ؟ (قرّب للمرتبة الأولى لزاوية الإطلاق).

13-2 برهن أن سرعة الإطلاق لقذيفة مداها R وأعلى ارتفاع لها H تعطى بالعلاقة التالية $[g(R^2+16H^2)/8H]^{1/2}$ وأن زاوية الإطلاق تعطى بالعلاقة: $\sin^{-1}[4H/(R^2+16H^2)^{1/2}]$.

14-2 تطلق قذيفة من طرف تلة ارتفاعها H بزاوية α فتسقط عند نقطة تبعد مسافة أفقية D عن نقطة الإطلاق. برهن أن أعلى ارتفاع تصل إليه $H+D\tan^2\alpha/[4(H+D\tan\alpha)$.

15-2 ماأعلى ارتفاع تصل إليه قذيفة تخضع لقوة مقاومة معطاة بالمعادلة (2-85)؟ انشر النتيجة وفق سلسلة قوى بالنسبة للوسيط $\alpha=b/m$ واحتفظ بالحدود الحاوية على α فقط وقارن بالمعادلة (2-83).

16-2 تطلق قذيفة من المبدأ بسرعة ابتدائية (v_{0x},v_{0y},v_{0z}) بوجود رياح سرعتها $\mathbf{w}=w\mathbf{j}$. (أ) حل معادلات الحركة (2-95) وجد كل من x وy وz بدلالة الزمن. (ب) جد النقطة (x_1,y_1) حيث ترتطم القذيفة بالمستوي الأفقي $z=0$ (احتفظ بالحدود الحاوية على r فقط). (جـ) برهن أنه إذا أهملنا مقاومة الهواء وحركة الرياح فإن مدى القذيفة سيكون أكبر مماهو عليه في حالة وجود مقاومة هواء بمعدّل $4rv_{oz}/3mg$، بينما يؤدي وجود رياح متحركة لجعل مدى القذيفة يبتعد عن المحور oy مسافة $2rwv_{oz}^2/mg^2$.

17-2 تطلق قذيفة في وسط مقاوم $(-r\mathbf{v})$ بسرعة ابتدائية $\mathbf{v}_o=(v_{ox},v_{oy},v_{oz})$. برهن أنه يمكن كتابة متجه الموضع للقذيفة بالشكل: $\mathbf{r}=-\frac{1}{2}gt^2\mathbf{k}+\mathbf{v}_0t-\Delta\mathbf{r}$ حيث $\Delta\mathbf{r}$ التصحيح اللازم إضافته على الحل في حالة انعدام مقاومة الهواء والمعطى بـ :

$$\Delta\mathbf{r}=r[\mathbf{v}_0(\tfrac{1}{2!}t^2-\tfrac{1}{3!}t^3+\cdots)+g(\tfrac{1}{3!}t^3-\tfrac{1}{4!}rt^4+\cdots)\mathbf{k}]$$

18-2 برهن أن القوى المذكورة في المسألتين 2-5 و 2-6 هي قوى محافظة وجد طاقة الوضع لكل منها واستخدمه لحساب الشغل في كل حالة.

19-2 حدد القوى المحافظة ممايلي وجد طاقة وضع المحافظة منها:

(أ) $F_x=6abyz^3-20x^3y^2$ و $F_y=6abxz^3-10bx^4y$ و $F_z=18abxyz^2$.

(ب) $F_x=18abyz^3-20bx^3y^2$ و $F_y=18abxz^3-10bx^4y$ و $F_z6abxyz^2$.

(جـ) $\mathbf{F}=F_x(x)\mathbf{i}+F_y(y)\mathbf{j}+F_z(z)\mathbf{k}$.

20-2 ماطاقة الوضع لكل من القوى التالية:

(أ) $F_x=2ax(y^3+z^3)$ و $F_x=2ax(y^3+z^3)+3ay^2(x^2+y^2)$ و $F_z=3az^2(x^2+y^2)$.

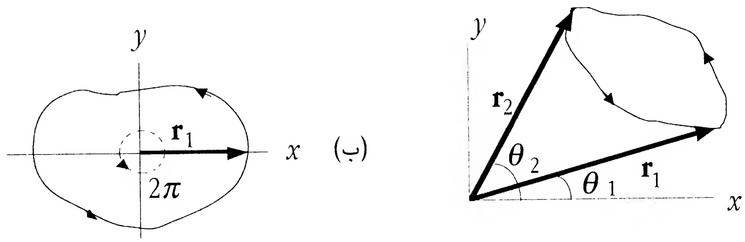
(ب) $F_\rho=a\rho^2\cos\phi$ و $F_\phi=a\rho^2\sin\phi$ و $F_z=az^2$.

(جـ) $F_r=-2ar\sin\theta\cos\phi$ و $F_\theta=-ar\cos\theta\cos\phi$ و $F_\phi=ar\sin\theta\sin\phi$.

(د) $F_x=axe^{-R}$ و $F_y=bye^{-R}$ و $F_z=cze^{-R}$ ، حيث $R^2=ax^2+by^2+cz^2$.

21-2 مامركبات القوة التي لها طاقة وضع من الشكل : (أ) axy^2z^3، (ب) $kr^2/2$ ، (جـ) $(k_xx^2+k_yy^2+k_zz^2)/2$؟

22-2 يتحرك جسيم في المستوي xy تحت تأثير قوة متغيرة من الشكل $\mathbf{F}=\alpha\,\boldsymbol{\theta}_1/r$ حيث α ثابت و r بُعد الجسيم عن المبدأ O و $\boldsymbol{\theta}_1$ متجه وحدة باتجاه θ(أ) هل القوة محافظة؟ (ب) ماشغل القوة عندما يتحرك الجسيم على المسار الموضح في الشكل (16-2 أ) و (16-2 ب)؟ علّق على النتيجة .



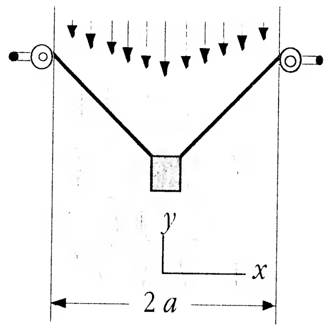
الشكل (16-2)

23-2 ادرس حركة جسيم كتلته m وشحنته q خاضع لمجالين كهربائي $\mathbf{E}=(E_0\sin\omega t)\,\mathbf{i}$ ومغناطيسي $\mathbf{B}=B_0\,\mathbf{k}$ بفرض أن $v_0=0$. ادرس الحالة عندما $\omega=qB_0/m$.

24-2 يتحرك جسيم(m,q) في مجال كهربائي ثابت ومجال مغناطيسي $\mathbf{B}$. برهن أنه إذا استخدمنا المتحول $\mathbf{r}'=\mathbf{r}-(\mathbf{E}\times\mathbf{B})/B^2]t$ فإن معادلة الحركة للمتحول الجديد $\mathbf{r}'$ تطابق تلك لـ $\mathbf{r}$ ماعدا أننا تخلصنا من مركبة $\mathbf{E}$ العمودية على $\mathbf{B}$.

25-2 يتحرك زورق في نهر تجري مياهه بسرعة معطاة بالعلاقة: $\mathbf{v}=-v_0(1-x^2/a^2)\mathbf{j}$ حيث $2a$ عرض النهر و x بُعد أي نقطة منه عن منتصفه، كما في الشكل (17-2)، بحيث يخضع الزورق لقوة دفع الماء المتناسبة مع سرعة الماء $(\mathbf{F}=b\mathbf{v})$، كما يخضع لقوة

شد خارجية ناتجة عن حبلين مربوطين به تساوي وتعاكس **F** ليسير الزورق بسرعة ثابتة باتجاه oy. بيّن فيما إذا كانت القوة محافظة أم لا واحسب شغلها عندما يسير الزورق مسافة l باتجاه oy ثم يعود نفس المسافة إلى الخلف .



الشكل (2-17)

26-2 يتحرك إلكترون في مجال كهربائي ثابت $\mathbf{E}=E\,\mathbf{i}$ وآخر مغناطيسي ثابت $\mathbf{B}=B\,\mathbf{j}$. اكتب معادلات الحركة وحلها بفرض أن $\mathbf{r}_0=0$ و $\mathbf{v}_0=v_0\,\mathbf{j}$.

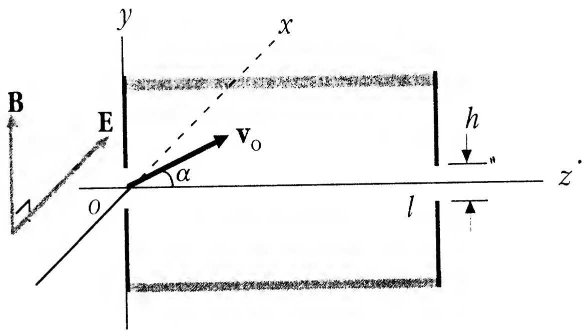
27-2 تنزلق حلقة صغيرة على محيط سلك دائري شاقولي نصف قطره b بدون احتكاك بدءاً من نقطة تقع على نفس ارتفاع المركز. (أ) ماسرعة الحلقة ورد فعل السلك عندما تصل إلى أخفض نقطة عليه؟ (ب) ماالزمن الذي ستستغرقه للوصول إلى هناك ؟

28-2 ينزلق جسيم كروي صغير على سطح كرة كبيرة نصف قطرها b بدءاً من السكون عند نقطة تقع على ارتفاع $b/2$ من مركز الكرة. عند أي ارتفاع سينفصل الجسمان؟

29-2 **الماغنترون الاسطواني** *(The Cylidrical Magnetron)* : يتحرك جسيم (m,q) في مجال كهربائي $\mathbf{E}=(a/\rho)\boldsymbol{\rho}_1$ ($\boldsymbol{\rho}_1$ متجه وحدة على امتداد ρ الذي يمثل بُعد الجسيم عن المحور oz) وآخر مغناطيسي $\mathbf{B}=B\,\mathbf{k}$، حيث a و B ثابتان موجبان أو سالبان. (أ) اكتب معادلات الحركة بالإحداثيات الاسطوانية. (ب) برهن أن الكمية $K \quad m\rho^2\dot{\varphi}+(qB/2c)\rho^{\cdot}$ هي ثابت حركة. (ج) استخدم تكامل الطاقة لمناقشة أنواع الحركة الممكنة آخذاً بعين الاعتبار كل القيم الممكنة للثوابت a و B و K و E.

(د) ماالشروط الواجب توافرها ليكون المسار دائرياً حول oz؟ (هـ) ماتردد الاهتزازات الصغيرة حول هذا المسار الدائري؟

30-2 منتقي السرعة *(velocity selector)*: يستخدم منتقي السرعة لانتقاء جسيمات نووية أو ذرية لها سرعة محددة في المسرعات النووية ، باستخدام مجالين؛ أحدهما كهربائي **E** باتجاه محور السينات، والآخر مغناطيسي **B** باتجاه محور الصادات، كما في الشكل (18-2) . تدخل حزمة الجسيمات للجهاز من خلال شق ضيق يقع في المستوي yz وتخرج من شق آخر موازٍ له ويقع في نفس المستوي. يتم اختيار المجالين **E** و**B** بحيث لاتنحرف الجسيمات التي لها السرعة المراد الحصول عليها فقط لتبقى متحركة باتجاه المحور oz. (أ) بفرض أن جسيماً ينطلق من المبدأ بسرعة v_0 صانعاً زاوية صغيرة α مع oz، متى يصل إلى النقطة $z=l$؟ احتفظ بحدود المرتبة الأولى لـ α. (ب) ماأفضل اختيار لكل من **E** و**B** بحيث يمر أكبر عدد من الجسيمات ذات السرعة v_0 من الشق الثاني بينما ينحرف غيرها أكبر مايمكن ؟ (جـ) بفرض أن عرض كل شق هو h، ماأكبر تغير δv في السرعة عن v_0 بحيث تستطيع الجسيمات التي كانت تتحرك مبدئياً موازية لـ oz أن تمر من الشق الثاني؟ استخدم قيم **E** و**B** التي وجدتها في (ب).



الشكل (18-2)